



**زیربرنامه:**

ResidualCoefficient

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان** | مرتضی نامور |  |
| سعید شیخی | C:\Users\saeed70\Desktop\SharifLogo.jpg |
| **تهیه کنندگان مستند** | مرتضی نامور، سعید شیخی | |
| **تاییدکنندگان** | مرتضی نامور | |
| **تاریخ تنظیم سند** | 07/12/1394 | |
| **شناسه سند** | **MC2F114F1** | |
| **زبان برنامه‌نویسی** | **Fortran 90/95** | |

1. وظایف

در این زیربرنامه ماتریس ضرایب  دستگاه معادلات خطی  که ناشی از اعمال هموارسازی مانده‌ها به طور ضمنی، در یک حلگر با روش گسسته‌سازی صریح بخش زمانی معادلات حاکم بر جریان سیال است، به شکل تنک[[1]](#footnote-1) و با روش مختصاتی[[2]](#footnote-2) ذخیره می‌گردد. باید توجه شود که این زیربرنامه در مواقعی که حل پایا مورد نظر است قابل استفاده می‌باشد.

1. توضیحات و تئوری­ها

به دلیل سادگی روش‌های گسسته‌سازی صریح، این روش‌ها کاربرد زیادی در حل معادلات اویلر و ناویر استوکس دارند. در این روش‌ها با به کاربردن هموارسازی مانده‌ها می‌توان ناحیه‌ی پایداری را گسترش داد و با عدد CFL بزرگتری به همگرایی رسید. این تکنیک برای اولین بار توسط لرات [1] در روش لکس-وندروف[[3]](#footnote-3) معرفی شد و سپس جیمسون در [2] این تکنیک را به طور ضمنی و صریح در روش‌های رانگ کوتا پیاده‌سازی کرد. برای هموارسازی مانده‌ها، قبل از محاسبه مقادیر بقایی در گام زمانی جدید مقدار  با مانده‌ی میانگین‌گیری شده‌ی  جایگزین می‌شود و سپس با استفاده از این مانده هموار شده مقادیر بقایی محاسبه می‌شود. روش هموارسازی مانده‌ها به دو صورت ضریب ثابت و ضریب متغیر پیاده‌سازی می‌گردد.

* هموارسازی مانده‌های ضمنی با ضریب ثابت

در روش هموارسازی مانده‌های ضمنی با ضریب هموارسازی ثابت مقدار  با حل رابطه‌ی زیر به طور ضمنی بدست می‌آید [3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

رابطه‌ی بالا در هر سلول محاسباتی  نوشته می‌شود. در این رابطه  ضریب هموارسازی و  لاپلاسین تقسیم نشده[[4]](#footnote-4) مانده‌ها است. لاپلاسین تقسیم نشده برای هر سلول شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  سلول همسایه و  تعداد کل سلول‌های همسایه هر سلول از شبکه است. به این ترتیب برای یک دستگاه مختصات دلخواه، رابطه‌ی ‏(1) به صورت زیر نوشته می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این حالت در هر سلول از شبکه، میانگین مانده‌ها به طور ضمنی محاسبه می‌شود و از آن برای محاسبه‌ی مقادیر بقایی استفاده می‌شود. به دلیل اعمال هموارسازی مانده‌ها به این شکل دامنه پایداری افزایش می‌یابد به طوری که پس از تعیین ضریب هموارسازی و با توجه به نحوه گسسته‌سازی مکانی معادلات، حداکثر عدد کورانت مجاز برای پایداری محاسبه می‌شود.

* هموارسازی مانده‌های ضمنی با ضریب متغیر

در روش هموارسازی مانده‌های ضمنی با ضریب متغیر در هر سلول محاسباتی ضریب هموارسازی در جهت  و  به طور جداگانه و برحسب میزان کشیدگی سلول تعیین می‌شود [3]. به این ترتیب روش هموارسازی مانده‌ها به طور ضمنی و با ضرایب هموارسازی متفاوت در یک شبکه‌ی بی‌سازمان مانند معادله‌ی ‏(4) پیاده‌سازی می‌شود [3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  تعداد سلول‌های همسایه هر سلول از شبکه در جهت  و  تعداد سلول‌‌های همسایه در جهت  می‌باشد.

برای تعیین ضرایب هموارسازی و اثر آن در دامنه پایداری در این حالت یک معادله‌ی موج به شکل زیر در نظر بگیرید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

رابطه بین ضریب هموارسازی و عدد CFL بستگی به نحوه گسسته‌سازی مکانی رابطه بالا دارد. با گسسته‌سازی مرکزی این رابطه در مکان داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در رابطه‌ی بالا عدد کورانت به شکل زیر محاسبه می‌شود [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با تحلیل فون نیومن رابطه‌ی ‏(6) پارامتر  به صورت زیر بدست می‌آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با به کاربردن هموارسازی مانده‌های ضمنی پارامتر  به شکل زیر تبدیل می‌شود [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن:



در این حالت شرایط مناسب پایداری مانند معادله‌ی ‏(10) است [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  عدد کورانت روش هموارسازی نشده است. به این ترتیب داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

سپس:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

بنابراین شرایط مناسب پایداری به شکل زیر تبدیل می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با استفاده از مشتق توابع مقدار  و  به شکل زیر محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با جایگذاری رابطه‌ی ‏(14) در معادله‌ی ‏(13) داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

اما با توجه به رابطه‌ی ‏(7) برای معادله موج با هموارسازی باقیمانده‌های ضمنی اعداد کورانت به شکل زیر محاسبه می‌شوند [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که در آن  عدد کورانت روش هموار شده و  مقدار کشیدگی شبکه  می‌باشد. در نتیجه معادله‌ی ‏(15) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در حالتی که شبکه به مقدار زیادی کشیده باشد ( یا ) رابطه‌ی قبل را می‌توان به شکل زیر نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

به این ترتیب ضرایب هموارسازی طبق روابط ‏(18) و ‏(19) به شکل زیر محاسبه می‌شود [4]:

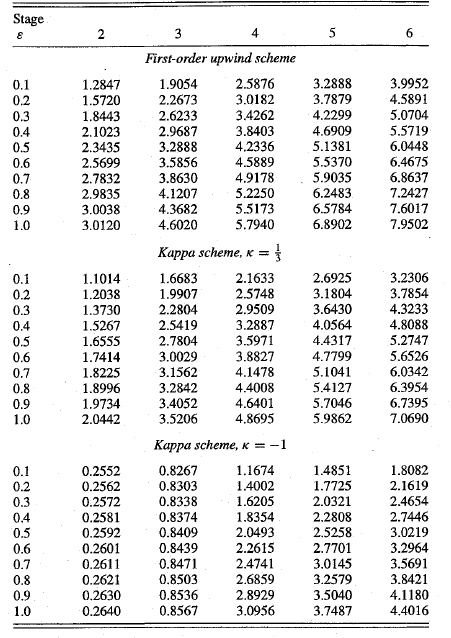
|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

مارتینلی با تغییر در روابط بالا و تعیین ضرایب هموارسازی به شکل زیر پایداری را بهبود بخشید [4]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

در این روابط  می‌باشد. ضرایب هموارسازی را می‌توان به روش‌های دیگر نیز بدست آورد و این مقادیر یکتا نیستند. همانطور که در روابط ‏(22)‏ و (23) دیده می‌شود با تعیین ضریب هموارسازی مناسب می‌توان شرایط پایداری را بهبود بخشید. به این ترتیب در روش هموارسازی مانده‌های ضمنی با ضریب متغیر، کاربر نسبت  یا همان نسبت افزایش عدد کورانت دلخواه را تعیین می‌کند و در هر سلول محاسباتی با توجه به میزان کشیدگی آن و روابط ‏(22)‏ و (23) مقدار ضریب هموارسازی محاسبه می‌شود. ذکر این نکته لازم است که این روابط با فرض گسسته‌سازی مکانی مرکزی بدست آمده و برای روش‌های بالادستی کاربرد ندارد. پیاده‌سازی هموارسازی مانده‌های ضمنی از روش هموارسازی مانده‌های صریح پیچیده‌تر است اما در این روش برخلاف هموارسازی مانده‌های صریح ضریب هموارسازی را می‌توان تا حد دلخواه بزرگ انتخاب کرد و در نتیجه شرط پایداری را به شدت بهبود بخشید.

در روش هموارسازی مانده‌های ضمنی با ضریب متغیر برای شبکه‌های کشیده تعیین ضریب هموارسازی در هر سلول وابسته به نوع گسسته‌سازی مکانی معادلات است و نمی‌توان آن را به طور کلی پیاده‌سازی کرد ولی در روش هموارسازی مانده‌های ضمنی با ضریب ثابت این ضریب به نوع گسسته‌سازی مکانی معادلات وابسته نیست و مقداری ثابت دارد. با توجه به اینکه روش هموارسازی با ضریب ثابت در جریان‌های زیرصوت، فراصوت و جریان‌های ویسکوز کارایی مناسبی دارد [5 صفحه 309] و پیاده‌سازی آن نیز بسیار ساده است، در اینجا در هر سلول ضریب هموارسازی ثابت و توسط کاربر تعیین می‌شود سپس مانده‌ی هموار شده با استفاده از رابطه‌ی ‏(3) محاسبه می‌شود. حداکثر عدد کورانت مجاز برای پایداری در این روش به نحوه گسسته‌سازی مکانی و زمانی و مقدار ضریب هموارسازی بستگی دارد. برای تعیین حداکثر عدد کورانت مجاز برای پایداری براساس مقدار ضریب هموارسازی و روش‌ مورد استفاده برای گسسته‌سازی مکانی و زمانی از ‏‏شکل (1) استفاده می‌شود [6]. در این شکل پارامتر  بیانگر گسسته‌سازی بخش مکانی است. به طوری که  بیانگر گسسته‌سازی مرکزی و  بیانگر روش بالادستی مرتبه 3 می‌باشد. لازم به ذکر است که اعداد کورانت بیان شده در این شکل مقداری است که روش هموارسازی مانده‌ها بهترین کارایی را دارد و حد پایداری ممکن است بیشتر از این مقادیر باشد ولی کارایی روش هموارسازی مانده‌ها کاهش می‌یابد. به این ترتیب با انتخاب یک ضریب هموارسازی مناسب (بهترین پیشنهاد  است) حداکثر عدد CFL برای پایداری طبق ‏شکل (1) محاسبه می‌شود و شبیه‌سازی انجام می‌گردد.



1. عدد کورانت مجاز برای روش‌های رانگ‌کوتا چند مرحله‌ای با هموارسازی مانده‌های ضمنی [6]

برای حل رابطه‌ی ‏(3) و محاسبه‌ی مانده هموار شده در هر سلول محاسباتی به طور ضمنی باید یک دستگاه معادلات خطی به شکل  حل گردد. در این دستگاه معادلات  ماتریس ضرایب، مقدار مانده‌های هموار نشده در هر سلول محاسباتی و  مقدار مانده‌ی هموار شده در هر سلول شبکه است که مجهول می‌باشد. باتوجه به بزرگی شبکه حل عادی این دستگاه معادلات بسیار زمان‌بر می‌باشد. بنابراین در این زیربرنامه ابتدا ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی به شکل تنک ذخیره می‌شود و چون ماتریس ضرایب دارای چگالی قطری بزرگی است ذخیره ماتریس به روش مختصاتی انجام می‌شود. از آنجا که ضریب هموارسازی در تمام مراحل حل در هر سلول ثابت است، یعنی ماتریس ضرایب در کل حل یکسان می‌باشد، ذخیره‌سازی ماتریس ضرایب یک بار در ابتدای برنامه انجام می‌شود. پس از ذخیره کردن ماتریس ضرایب به شکل تنک، در هر تکرار زمانی دستگاه معادلات با استفاده از روش‌های تکرار مثل روش GMRES حل می‌شود و در هر سلول مقدار باقیمانده هموار شده محاسبه می‌گردد. برای حل دستگاه معادلات خطی با روش‌های تکراری حدس اولیه برای بردار  همان مقدار مانده‌های هموار نشده یعنی ماتریس  در نظر گرفته می‌شود. با این حدس اولیه دستگاه معادلات حداکثر با دو تکرار همگرا می‌شود [7] که این موضوع از افت سرعت همگرایی جلوگیری می‌کند. پس از محاسبه مقدار باقیمانده‌های هموار شده در تمام سلول‌ها این مقادیر در در یکی از روش‌های گسسته‌سازی زمانی مثل روش رانگ کوتا به شکل زیر اعمال می‌گردد:



برای تعیین ماتریس ضرایب مربوط به دستگاه معادلات ‏(3) این معادلات را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

بنابراین عناصر روی قطر اصلی ماتریس ضرایب به شکل  که  تعداد سلول‌های همسایه و عناصر مربوط به سطر ام و ستون ام به شکل  می‌باشند. با بررسی تمام سلول‌ها و همسایه‌های آن به شکل گفته شده ماتریس ضرایب ایجاد می‌شود.

در ادامه بخش‌های زیربرنامه برای‌ ذخیره‌سازی تنک ماتریس ضرایب به روش مختصاتی آورده می‌شود.

1. بخش­های زیربرنامه

در این قسمت تمام بخش‌های زیربرنامه مطابق با شماره‌گذاری موجود در برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

1. مقداردهی اولیه به پارامتر نشان دهنده تعداد عناصر غیرصفر

از آنجا که تعداد عناصر غیرصفر ماتریس ضرایب (درواقع تعداد عضوهای ماتریس تنک) مشخص نیست، یک متغیر محلی برای شمارش آن‌ها در نظر گرفته می‌شود که لازم است این متغیر در ابتدا صفر قرار داده شود.

1. مقداردهی اولیه به ماتریس تعداد همسایه‌ها

همانطور که گفته شد عناصر روی قطر اصلی ماتریس ضرایب به شکل  محاسبه می‌شود، بنابراین باید تعداد همسایه‌های هر سلول محاسبه و ذخیره گردد. از آنجا که در شمارش تعداد همسایه‌های یک سلول با یک فرایند اضافه کردن مقادیر به مقادیر قبلی روبرو هستیم در ابتدا باید تمام عضوهای ماتریس نشان دهنده تعداد همسایه‌ها صفر قرار داده شود.

1. بررسی تمام اضلاع غیرمرزی شبکه

با توجه به اینکه در اضلاع مرزی هر سلول هیچ همسایه‌ای وجود ندارد برای تعیین ماتریس ضرایب هموارسازی تمام اضلاع غیرمرزی سلول‌های شبکه بررسی می‌شوند تا سلول‌ها همسایه مشخص گردند.

1. ذخیره اطلاعات ضلع مورد بررسی در پارامترهای محلی

شماره سلول‌های اصلی و همسایه ضلع مورد بررسی در پارامترهای محلی ذخیره می‌گردد.

1. محاسبه تعداد همسایه‌ها

از آنجا که در هر ضلع غیرمرزی سلول‌های دو طرف آن همسایه یکدیگرند به تعداد همسایه‌های هر دو سلول یک واحد اضافه می‌گردد تا در پایان تعداد همسایه‌های تمام سلول‌ها مشخص گردد.

1. ذخیره عناصر غیرقطری ماتریس ضرایب

باتوجه به اینکه دو سلول مجاور هر ضلع غیرمرزی همسایه یکدیگر هستند در هموارسازی مانده‌های یکدیگر تاثیر دارند. در نتیجه به ازای هر ضلع، عناصر غیر قطری ماتریس ضرایب مربوط به دو سلول مجاور آن با توجه به رابطه‌ی ‏(24) به صورت  ذخیره می‌شود. سطر و ستون مربوط به هر عضو هم در ماتریس‌های مربوطه ذخیره می‌گردد. یک واحد نیز به تعداد عناصر غیرصفر اضافه می‌شود.

1. ذخیره عناصر قطر اصلی ماتریس ضرایب

پس از بررسی تمام اضلاع غیرمرزی تعداد همسایه‌های هر سلول مشخص شده ‌است. هم‌چنین تمام عناصر غیرقطری ماتریس ضرایب نیز ذخیره گشته است. برای تکمیل ماتریس ضرایب باید عناصر قطر اصلی هم ذخیره گردد. برای این منظور در هرسلول با استفاده از رابطه‌ی ‏(24) عناصر قطر اصلی به شکل  محاسبه و ذخیره می‌گردد.

1. مراجع

[1] Lerat, A., Turkel, E., “Une Classe De Schemas Aux Differences Implicites Pour Les Systemes Hyperboliques De Lois De Conservation”, C.R. Acad. Sci., Vol. 288A, 1979, pp. 1033-1036.

[2] Jameson, A., “The Evolution of Computational Methods in Aerodynamics”, J. Appl. Mech., Vol. 50, No. 4b, pp. 1052-1070, Dec.1983.

[3] Mavriplis, D.J., Jameson, A., “Multigrid Solution of the Navier-Stokes Equations on Triangular Meshes”, AIAA Paper Vol. 28 No. 8, August 1990.

[4] Swanson, R.C., Turkel, E., “Multistage Schemes with Multigrid for Euler and Navier-stokes Equations”, NASA Technical Paper 3631, August 1997.

[5] Blazek, J., “Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications”, ELSEVIER, Second Edition, 2006.

[6] Tai, C.H., Sheu, J.H., “Optimal Multistage Schemes for Euler Equations with Residual Smoothing,” AIAA Paper Vol. 33 No. 6, August 1995.

[7] Slack, D.C., Whitaker, D.L. and Walters, R.W., “Time Integration Algorithms for the Two-Dimensional Euler Equations on Unstructured Meshes”, AIAA Journal, VOL. 32, NO. 6, 1994.

1. Sparse [↑](#footnote-ref-1)
2. Coordinate Method [↑](#footnote-ref-2)
3. Lax-Wendroff [↑](#footnote-ref-3)
4. Undivided Laplacian [↑](#footnote-ref-4)